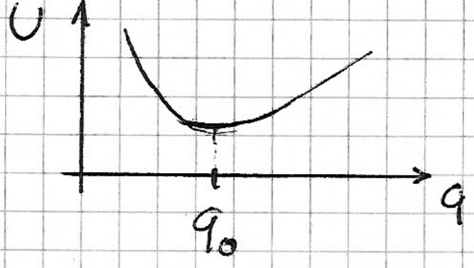
5. Kleine Schwingungen

5.1. Eindimensionale Schwingungen

abgeschlossenes System, generalisierte Koord. q

$$L = \frac{1}{2} a(q)\, \dot{q}^2 - U(q)$$



Gleichgewichtslage bei $q_0 \Leftrightarrow \frac{\partial U}{\partial q}(q_0) = 0$

$q = q_0 = \text{const.}$ Lösung der Bew. gln.

kleine Auslenkungen $x \equiv q - q_0$, $\dot{x} \equiv \dot{q}$ $\Rightarrow$

$$U(q) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{irrelevant}}}{U(q_0)} + \underset{\substack{\uparrow \\ =0}}{\frac{\partial U}{\partial q}(q_0)} \cdot x + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial q^2}(q_0) \cdot x^2}_{=: \frac{k}{2} x^2} + \mathcal{O}(x^3)$$

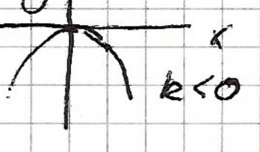
$\mathcal{O}(x^3)$ vernachlässigbar falls x hinreichend klein

kin. Term $\frac{1}{2} a(q)\, \dot{q}^2 = \frac{1}{2} a(q) \dot{x}^2 = \underbrace{\frac{1}{2} a(q_0)\, \dot{x}^2}_{=: \frac{m}{2} \dot{x}^2} + \mathcal{O}(x \dot{x}^2)$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2}$$ harmonischer Oszillator

- falls x kartesisch $\to$ m Masse; sonst analoger Parameter
- $U(x) = \frac{k}{2} x^2 \Rightarrow F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx$ Hookesches Gesetz
- k: Federkonstante 
- $k > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial q^2}(q_0) = k > 0$ stabiles Gleichgewicht

  sonst Widerspruch zu Annahme x klein



ELG: $m\ddot{x} + kx = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \boxed{\omega := \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Lineare, homogene DGL, konst. Koeff. $\rightarrow$ Ansatz $x \sim e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \quad e^{\lambda t}(\lambda^2 + \omega^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 = -\omega^2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm i\omega$$

$\Rightarrow$ allg. Lösung $\quad x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$

andere Basis (reell): $\frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) = \cos\omega t$, $\frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = \sin\omega t$

$$\Leftrightarrow \quad x(t) = a_1 \cos\omega t + a_2 \sin\omega t$$

$$\Leftrightarrow \quad x(t) = a\cos(\omega t + \alpha) =$$

$$= \underbrace{a\cos\alpha}_{a_1} \cos\omega t \underbrace{-a\sin\alpha}_{a_2} \sin\omega t$$

$$\Rightarrow \quad a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \qquad \tan\alpha = -\frac{a_2}{a_1}$$

Komplexe Schreibweise $\quad x(t) = Re(Ae^{i\omega t}) = Re\, \overbrace{ae^{i\alpha}}^{A} e^{i\omega t}$

$$= a\cos(\omega t + \alpha)$$

2 Konstanten $\leftrightarrow$ Anfangsbedingungen

<u>Beispiel:</u> $\quad x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{l} x_0 = c_1 + c_2 \\ 0 = i\omega(c_1 - c_2) \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{x_0}{2}$$

$\Rightarrow$ <u>$x(t) = x_0 \cos\omega t$</u> (reell)

Trigonometrische Relationen

$$\cos(\alpha+\beta) = Re\, e^{i(\alpha+\beta)} = Re\left[(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)\right]$$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

analog. $\quad \sin(\alpha+\beta) = Im\, e^{i(\alpha+\beta)} = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\underline{\omega}$: (Kreis-) Frequenz $[\omega] = \frac{\text{rad}}{s}$ Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow$ Energieerhaltung

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)$$

mit $x = a\cos(\omega t + \alpha)$, $\dot{x} = -a\omega\sin(\omega t + \alpha)$

$$\Rightarrow E = \frac{m}{2}\omega^2 a^2 = U(x=a) = T(x=0) \qquad a = x_{max}$$

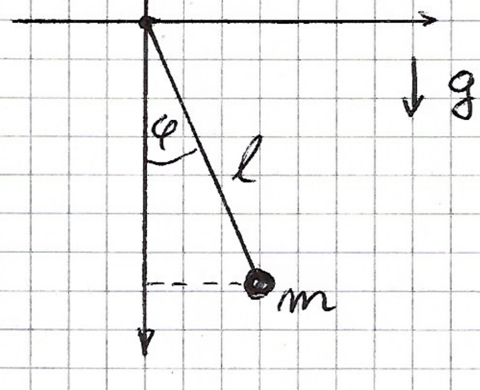
Virialsatz: $\quad x = a\cos\omega t \qquad U = \frac{m}{2}\omega^2 x^2$

$$x^2 = a^2\cos^2\omega t = a^2 \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t)$$

$$\Rightarrow \overline{x^2} = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\frac{a^2}{2}\int_0^T(\underset{\substack{\downarrow\\ T}}{1} + \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\cos 2\omega t})\,dt = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow \bar{U} = \frac{m}{4}\omega^2 a^2 = \frac{E}{2}, \quad \bar{T} = E - \bar{U} = \frac{E}{2} = \bar{U} \qquad \checkmark$$

Beispiel: Pendel



$$L = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \dots$$

φ klein $\rightarrow$ $L = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 - \frac{m}{2}gl\varphi^2 = \frac{m}{2}l^2(\dot{\varphi}^2 - \frac{g}{l}\varphi^2)$

$\rightarrow$ harmonischer Oszillator in φ

mit $\omega^2 = \frac{g}{l}$ $\qquad \underline{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}}$

Erzwungene Schwingungen

$U(x,t) = U(x) + U_e(x,t)$ $\qquad$ U_e: äußeres Feld

Näherung, 2. Ordn. in x: $\qquad U(x) = \frac{k}{2}x^2$

$$U_e(x,t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{irrelevant}}}{U_e(0,t)} + \underbrace{x \left.\frac{\partial U_e}{\partial x}\right|_{x=0}}_{= -x F(t)}$$

betrachte $F = \mathcal{O}(x)$ klein, $xF = \mathcal{O}(x^2)$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 + xF(t) \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow \text{ELG} \quad m\ddot{x} = -kx + F(t) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m}F(t)} \quad (*)$$

allg. Lsg. v. $(*)$: allg. Lsg. d. homogenen DGL + spezielle Lsg. der inhomogenen

- <u>periodische Kraft</u> $\quad F(t) = f\cos(\omega_1 t + \beta)$

spezielle Lösung: Ansatz $x_1 = b\cos(\omega_1 t + \beta)$, $\ddot{x}_1 = -\omega_1^2 x_1$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} (\omega^2 - \omega_1^2)\, b\cos(\omega_1 t + \beta) = \frac{f}{m}\cos(\omega_1 t + \beta) \quad \Rightarrow b = \frac{f}{m(\omega^2 - \omega_1^2)}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \omega_1^2)}\cos(\omega_1 t + \beta)$$

Überlagerung zweier Schwingungen mit Frequ. ω u. ω_1

<u>Fall $\omega_1 \to \omega$</u> $\quad$ äquiv. Schreibweise d. allg. Lsg. $x(t) \to x(t) + c\cos(\omega t + \gamma)$

$$\text{speziell:} \quad x(t) = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \omega_1^2)}\left[\cos(\omega_1 t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)\right]$$

$\omega_1 \to \omega$, l'Hospital $\Rightarrow$ $x(t) = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m\omega}\, t \sin(\omega t + \beta)$

<u>Resonanz</u> $\qquad$ Lineares Anwachsen der Amplitude

[gilt nur solange $x(t)$ genügend klein bleibt]

- <u>beliebige Kraft $F(t)$</u>

Trick: $\ddot{x} + \omega^2 x \equiv \frac{d}{dt}(\dot{x} + i\omega x) - i\omega(\dot{x} + i\omega x) =$

$$= \frac{d}{dt}\xi - i\omega\xi \qquad \text{mit} \quad \xi = \dot{x} + i\omega x$$

$$\frac{d}{dt}\xi - i\omega\xi = \frac{1}{m}F(t)$$

allg. Lsg. der hom. Gl.: $\xi = A e^{i\omega t}$

spezielle Lsg. der inhomogenen Gl.: Ansatz $\xi = A(t) e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\xi - i\omega\xi = \dot{A} e^{i\omega t} = \frac{1}{m}F(t)$$

$$\Rightarrow A(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{m} F(t') e^{-i\omega t'} dt' + \xi_0$$

$$\Rightarrow \xi(t) = e^{i\omega t}\left[\int_{t_0}^{t} \frac{1}{m} F(t') e^{-i\omega t'} dt' + \xi_0\right]$$

$$\underline{x(t) = \frac{1}{\omega}\,\mathrm{Im}\,\xi(t)} \qquad (x, \dot{x}, F \text{ reell})$$

Energiezuwachs durch $F(t)$

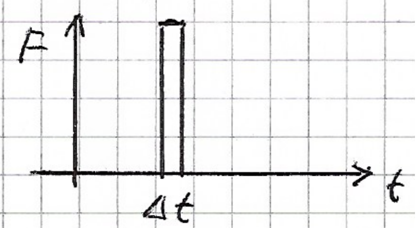
$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{m}{2}|\xi|^2$$

für $t_0 = -\infty$, $|\xi(-\infty)| = |\xi_0| = 0 \Leftrightarrow E(-\infty) = 0$

$$\Rightarrow \Delta E = E(+\infty) = \frac{m}{2}|\xi(\infty)|^2 = \frac{1}{2m}\Big|\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} F(t') e^{-i\omega t'} dt'}_{=:\,\tilde{F}(\omega)}\Big|^2$$

Fourier-Transformierte von $F(t)$

- Kurze Einwirkung der Kraft: $\Delta t \ll \frac{2\pi}{\omega}$



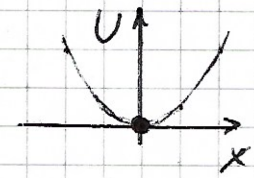
Kraftstoß

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2m}\Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\,dt}_{=p}\Big)^2 = \frac{1}{2m}p^2$$

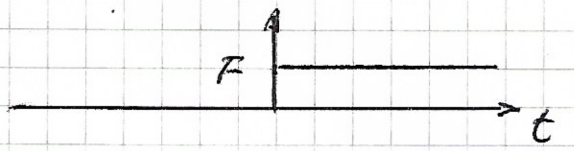
allg.: $\dot{p} = F \qquad \Delta p = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt$

Beispiel:

Oszillator $\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F(t)$, $\quad F(t) = \begin{cases} F = \text{const.} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$



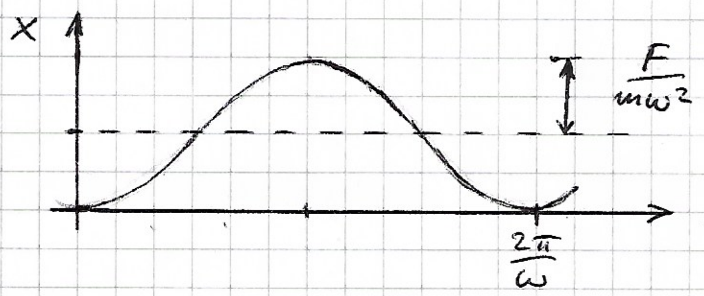
$x(0) = \dot{x}(0) = 0$



$$\Rightarrow \quad \xi(t) = e^{i\omega t} \left[\int_0^t \frac{1}{m} F e^{-i\omega t'} dt' \right] \qquad t_0 = 0, \ \xi_0 = 0$$

$$= \frac{F}{m} e^{i\omega t} \left. \frac{e^{-i\omega t'}}{-i\omega} \right|_0^t = i \frac{F}{m\omega} \left(1 - e^{i\omega t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \xi = \frac{F}{m\omega^2} (1 - \cos\omega t)$$



Schwingung um $x = \frac{F}{m\omega^2}$ mit Amplitude $\frac{F}{m\omega^2} \equiv \frac{F}{k}$

$t > 0$!

$$U(x) = \frac{k}{2} x^2 - xF = \frac{k}{2} \left(x - \frac{F}{k}\right)^2 - \frac{F^2}{2k}$$

Energiezuwachs:

$$\Delta E = \frac{1}{2m} \left| \int_0^\infty F e^{-i\omega t} dt \right|^2, \quad F \to F \cdot e^{-\varepsilon t} \ (\text{Limes } \varepsilon \to 0)$$

"adiabatisches Abschalten"

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-(i\omega + \varepsilon)t} dt = \left. \frac{e^{-(i\omega + \varepsilon)t}}{-(i\omega + \varepsilon)} \right|_0^\infty = \frac{1}{i\omega + \varepsilon}$$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{F^2}{2m} \frac{1}{|i\omega + \varepsilon|^2} = \frac{F^2}{2m} \frac{1}{\omega^2 + \varepsilon^2} \overset{\varepsilon \to 0}{=} \frac{F^2}{2m\omega^2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{E} = \frac{m}{2} \omega^2 a^2 = \frac{m}{2} \omega^2 \frac{F^2}{m^2 \omega^4} = \frac{F^2}{2m\omega^2} \quad \checkmark$$