T1p Theoretische Mechanik

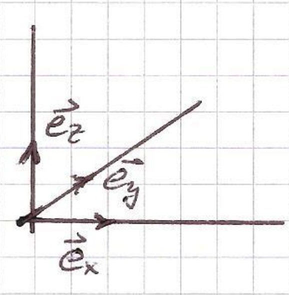
1. Grundbegriffe
2. Lagrangeformalismus
3. Symmetrien und Erhaltungssätze
4. Bewegung im Zentralfeld
5. Kleine Schwingungen
6. Bewegung des starren Körpers
7. Kanonischer Formalismus
8. Relativistische Mechanik

Literatur zur Theoretischen Mechanik:

Landau, Lifschitz (Bd. I)
Fließbach
Kuypers
Feynman Lectures (Vol. I)

1. Grundbegriffe

- Zeit t
- Raum, Bezugssystem (BS), Koordinaten
  z. B. Kartesische Koord. x, y, z



Orthonormalbasis $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad i,j \in \{x,y,z\} \quad \{1,2,3\}$$

- Massenpunkt: Körper vernachlässigbarer Ausdehnung

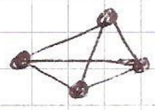
Lage im Raum: $x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}, \qquad r_i \quad i \in \{1,2,3\}$$

System von N Massenpunkten

$$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N \qquad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \end{pmatrix}$$

starrer Körper: System von Massenpunkten mit festen Abständen



Kontinuumslimes $\rightarrow$ 

- Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r} = \dot{\vec{r}}$

Beschleunigung $\frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \ddot{\vec{r}}$

des Massenpunkts

Newton'sche Axiome

1. Es gibt BS (Inertialsysteme, IS) in denen für einen kräftefreien Massenpunkt gilt:

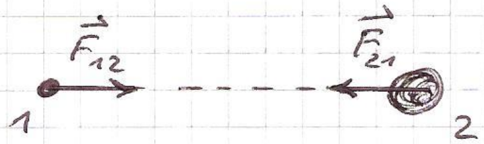
$$\frac{d}{dt}\vec{r} = \vec{v} = \text{const.}$$

2. $\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}$, (für IS)

   $\vec{p} = m\vec{v}$ Impuls , $\vec{F}$ Kraft, m Masse

   falls m Konstant: $m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \vec{F}$

3. $\vec{F}_{\text{actio}} = -\vec{F}_{\text{reactio}}$



---

zu 2.: Probekörper (Massenpunkte) 1, 2 ; gleiche Kraft

$\rightarrow$ $m_1\ddot{\vec{r}}_1 = m_2\ddot{\vec{r}}_2$ $\Rightarrow$ $\frac{m_1}{m_2}$ bestimmbar

↑ messbar ↑

$\rightarrow$ m definiert in Bezug auf Referenzkörper, z.B. 1kg

$\rightarrow$ $\vec{F} := \frac{d}{dt}(m\vec{v})$ definiert Kraft $\vec{F}$

Einheiten: $[m] = kg$, $[t] = s$, $[\vec{r}] = m$ $\Rightarrow$ $[\vec{F}] = kg\frac{m}{s^2} \hat{=} N$

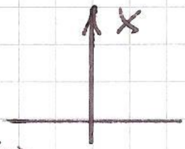
Mechanisches Problem: $m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)$

DGL 2. Ordnung für $\vec{r}(t)$

Lösung mit Integrationskonstanten $\vec{r}(0)$, $\dot{\vec{r}}(0)$

<u>Beispiel:</u> 1-dim. Bewegung im homogenen Schwerefeld

$m\ddot{x} = F$, $F = -mg$ $\Rightarrow$ $\underline{\ddot{x} = -g}$



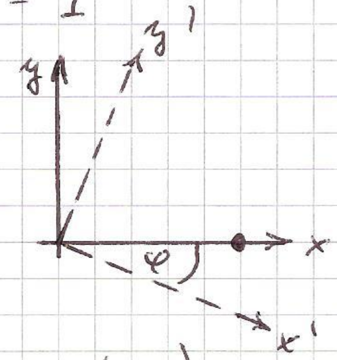
allg. Lsg. $x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + C_1 t + C_2 = -\frac{g}{2}t^2 + \dot{x}(0)t + x(0)$

Galilei-Transformationen

Drehung: $\vec{r}\,' = D\vec{r}$ $\qquad D^T D = 1$

z.B.

$$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$r_i' = D_{ij} \cdot r_j \qquad (\equiv \sum_j D_{ij} r_j$ Summenkonvention)

$D_{ij} D_{kj} = \delta_{ik} \qquad r_1' = D_{11} r_1 + D_{12} r_2 + D_{13} r_3 = \cos\varphi\, r_1 - \sin\varphi\, r_2$

allg. Galilei-Trafo

$IS \to IS'$ $\qquad$ 10 Parameter

$$r_i' = D_{ij} \cdot r_j - V_i t - a_i \qquad t' = t - t_0$$

konst. Drehung, Relativbewegung, konst. Verschiebung

Kovarianz der Newton-Mechanik

$$\dot{r}_i'(t') = \frac{dr_i'}{dt'} = \frac{dr_i'}{dt} = D_{ij} \cdot \dot{r}_j(t) - V_i \;, \qquad \ddot{r}_i'(t') = D_{ij} \ddot{r}_j(t)$$

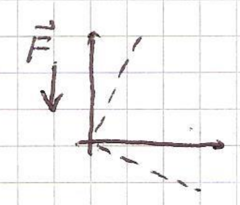
$$m \ddot{r}_j(t) = F_j(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

$$\Rightarrow m \ddot{r}_i'(t') = m D_{ij} \cdot \ddot{r}_j(t) = D_{ij} \cdot F_j(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \equiv F_i'(\vec{r}\,', \dot{\vec{r}}\,', t')$$

Bem.: $r_i' = D_{ij} \cdot r_j \qquad F_i'(\vec{r}\,') = D_{ij} \cdot F_j(\vec{r})$

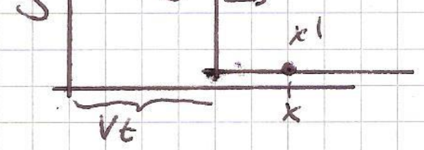
Trafo eines räumlichen Vektors unter Drehung der Koordinatenachsen

Beispiel:

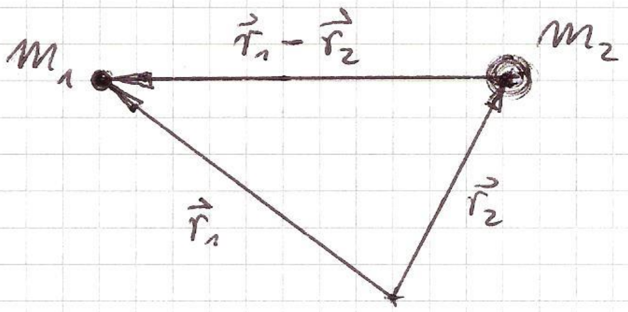


$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = \text{const}, \qquad m\ddot{\vec{r}}\,' = m D \ddot{\vec{r}} = D\vec{F} = \vec{F}\,'$

Spezialfall $\qquad r_i' = r_i - V_i t$



Newtons Gravitationsgesetz



$$\vec{F}_{12} = -G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \qquad m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12}$$

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \qquad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21}$$

Galilei-invariant:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r}_1{}' = \vec{r}_1 - \vec{V} t \\ \vec{r}_2{}' = \vec{r}_2 - \vec{V} t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \ddot{\vec{r}}_1{}' = \ddot{\vec{r}}_1 \,, \quad \ddot{\vec{r}}_2{}' = \ddot{\vec{r}}_2 \\ \vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}' = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{array}$$

ebenso für $\vec{a} \neq 0$, $t_0 \neq 0$

analog für Drehung:

$$\vec{r}_{1,2}{}' = D \, \vec{r}_{1,2}$$

damit:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \Leftrightarrow m_1 \ddot{\vec{r}}_1{}' = -G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}'}{|\vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}'|^3}$$