1. $L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m}{2}\omega^2 x^2$

a., ELG: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$

b., Zeige: allg. Lsg. ist $x(t) = a \sin(\omega(t-t_0))$

$\dot{x} = a\omega\cos(\omega(t-t_0))$, $\ddot{x} = -a\omega^2\sin(\omega(t-t_0)) = -\omega^2 x$ ✓

c., E für allg. Lsg. aus b., ? Zeige $\frac{d}{dt}E = 0$

$E = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 =$

$= \frac{m}{2}\omega^2 a^2 \cos^2\omega t + \frac{m}{2}\omega^2 a^2 \sin^2 \omega t = \frac{m}{2}\omega^2 a^2 = \text{const.}$

d., $x \to x' = \alpha x$, $t \to t' = \beta t$

Zeige: Schwingungsdauer τ unabh. von Amplitude (direkt bzw. mit Skalenformel)

direkt: $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ unabh. von a

Skalenformel: $\beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}} \overset{k=2}{=} \alpha^0 = 1$ d.h. $\left.\begin{matrix} a \to \alpha a \\ t \to t \end{matrix}\right\}$ skalierte Lsg.

oder: $\frac{t'}{t} = \left(\frac{\ell'}{\ell}\right)^{1-\frac{k}{2}} = 1$

e., Verifiziere Virialsatz für Lsg. aus b.,

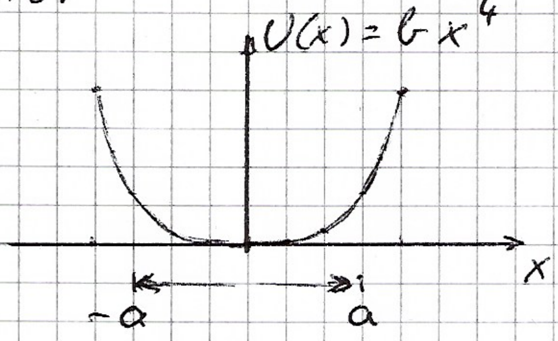
$T = \frac{m}{2} \omega^2 a^2 \cos^2 \omega t \qquad U = \frac{m}{2} \omega^2 a^2 \sin^2 \omega t$

$\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad \overline{\cos^2 \omega t} = \overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad \overline{T} = \overline{U} = \frac{m}{4} \omega^2 a^2$ ✓

2. Anharmonischer Oszillator

$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - b x^4$



a.) ELG

$m \ddot{x} + 4 b x^3 = 0$

b.) Zusammenhang zwischen Schwingungsdauer und Amplitude?

$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{k}{2}} \overset{k=4}{=} \frac{l}{l'} \quad \Rightarrow \quad \tau \sim \frac{1}{a}$

c.) $\overline{U}, \overline{T}$?

$\overline{U} = \frac{2}{k+2} E, \quad \overline{T} = \frac{k}{k+2} E, \quad k=4 \Rightarrow \overline{U} = \frac{1}{3} E, \quad \overline{T} = \frac{2}{3} E$