LMU München
Fakultät für Physik

Prof. G. Buchalla

27. April 2020

Übungen zu T1p Mechanik im SoSe 2020
Blatt 2

Aufgabe 1: Schraubenlinie

Gegeben ist die Schraubenlinie

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\,t \\ b\cos\omega t \\ b\sin\omega t \end{pmatrix} \qquad a, b, \omega \in \mathbb{R}$$

a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}(t) \qquad \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) \equiv \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{r}(t)$$

b) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit $|\vec{v}(t)|$ und der Beschleunigung $|\vec{a}(t)|$.

c) Sind Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und Beschleunigung $\vec{a}(t)$ orthogonal zueinander? Zeigen Sie, dass $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$ für jede Bahnkurve $\vec{r}(t)$ orthogonal zueinander sind, wenn der Betrag der Geschwindigkeit $|\vec{v}(t)|$ konstant ist.

Aufgabe 2: Brachistochrone (Johann Bernoulli 1696)

Ein Massenpunkt gleitet reibungsfrei entlang einer festen Kurve K im Schwerefeld der Erde vom Anfangspunkt $A = (0, 0)$ zum Endpunkt $B = (x_b, y_b)$. Seine Anfangsgeschwindigkeit im Punkt A ist gleich Null. Wie muss man K wählen, damit die Transitzeit

$$T = \int_A^B \frac{ds}{|\vec{v}|} = \sqrt{\frac{1}{2g}} \cdot \int_0^{x_b} dx f(y(x), y'(x)) \quad \text{mit} \quad f(y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} \quad \text{und} \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

möglichst klein ist ?

Hinweise:

a) Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für $y(x)$ her.

b) Anstatt diese Differentialgleichung zu lösen, können Sie zur Lösung des Problems die Konstanz der folgenden Größe ausnutzen:

$$I = y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f \tag{1}$$

Überzeugen Sie sich, dass I für beliebige Funktionen f konstant bleibt, indem Sie $\frac{dI}{dx} = 0$ mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung zeigen.

c) Die Gleichung (1) ergibt eine DGL der Form:

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{\alpha - y}}$$

Bestimmen Sie α als Funktion von I. Die Differentialgleichung kann über die Variablensubstitution $y = \frac{\alpha}{2}(1 - \cos\tau) = \alpha \sin^2(\frac{\tau}{2})$ gelöst werden. Finden Sie $x(\tau)$. Die Kurve K ist dann in der Parameterdarstellung durch $y(\tau)$ und $x(\tau)$ gegeben.

Besprechung in der Woche vom 4.5. - 8.5.2020