Wir starten $8^{\underline{00}}$ für Fragen und 8^{15} mit Vorlesung.

Gibt es Fragen? Agenda später:

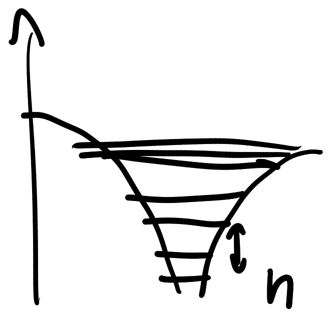
- Bonussystem
- nur 13 Tutoren → #19 splitten
- Austausch per email mit Tutor

Sonderfälle: korbinian.felber@campus.lmu.de

Einführung in die statistische Mechanik

(Mikro)Zustände und die Quantenmechanik

System endlicher Ausdehnung ⇒ diskrete Energiezustände



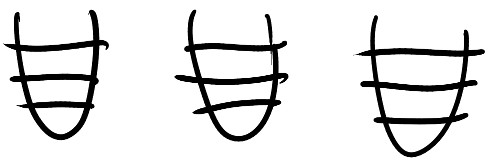
H-Atom

⇒ Zahl Ω der (Mikro)Zustände ist prinzipiell abzählbar (Zustandszahl)

Grundannahme der stat. Mechanik

Ein abgeschlossenes System im Gleichgewicht ist mit gleicher Wahrscheinlichkeit in jedem seiner erreichbaren Zustände anzutreffen.

Beispiel: $N=3$ Oszillatoren / Atome / Teilchen mit $q=1,2,3$ Energiequanten.



	1	2	3	
Energie 0:	0	0	0	$\Omega=1$
Energie 1:	1	0	0	
	0	1	0	$\Omega=3$
	0	0	1	
Energie 2:	2	0	0	
	0	2	0	
	0	0	2	$\Omega=6$
	1	1	0	
	1	0	1	
	0	1	1	

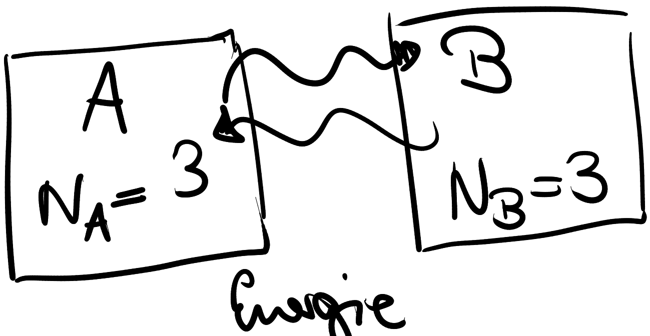
	1	2	3	
Energie 3:	3	0	0	
	0	3	0	
	0	0	3	
	2	1	0	
	2	0	1	$\Omega=10$
	1	2	0	
	1	0	2	
	0	1	2	
	1	1	1	

⋮

Allgemein: Zustandszahl $\Omega = \frac{(q+N-1)!}{q!\,(N-1)!}$

z.B.: $N=3$; $q=2$: $\Omega = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{1\cdot\cancel{2}\cdot 3\cdot\cancel{4}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}} = 6$

2 Systeme, die Energie austauschen:



Kleines System

$q_{ges} = q_A + q_B = 6$

Gesamtenergie

Aber: unklar wie auf A und B verteilt.

$N_A = N_B = 3$ ($N=6$; fix, Teilchenzahl konstant)

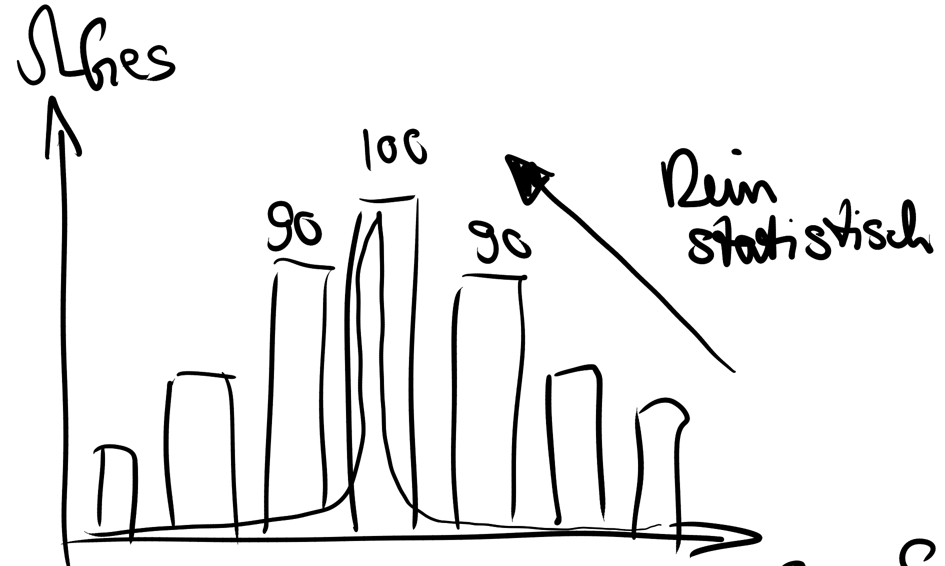
Wegen stat. Unabhängigkeit: $\Omega_{Ges} = \Omega_A \cdot \Omega_B$

Möglichkeit der Energieverteilung

$\Omega = \frac{(6+3-1)!}{6!\,(3-1)!} = 28$

$N=3$, $q=6$

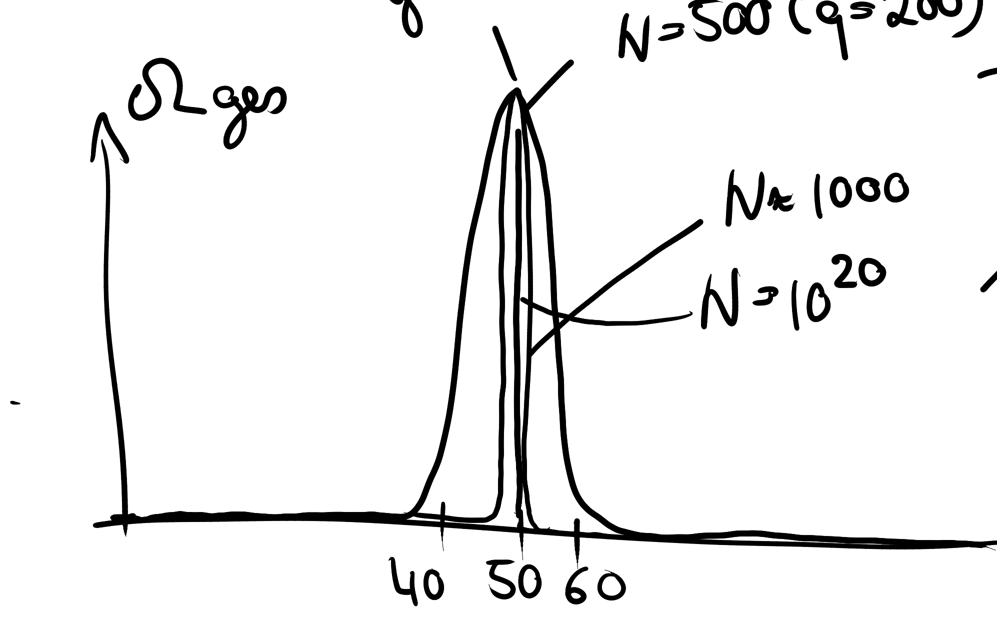
q_A	Ω_A	q_B	Ω_B	Ω_{Ges}
0	1	6	28	28
1	3	5	21	63
2	6	4	15	90
3	10	3	10	100 ← Energie gleich verteilt: Gleichgewicht.
4	15	2	6	90
5	21	1	3	63
6	28	0	1	28



„Wärmefluß" von heiß nach kalt wegen der Wahrscheinlichkeit

q_A: Energie in A

$N_A = 250$ $N_B = 250$ Gleichgewicht $q_{Ges} = 100$ Energiequanten



Für $N = 10^{23}$ ist die Skala q_A 10^5 km breit.

Bei ungleich verteilten Energien: Energiefluß zwischen A und B stoppt, wenn das System nahe dem wahrscheinlichsten Zustand ist. (Bis dorthin steigt die Entropie.)

Nota bene: Nur Folgerung aus obiger Grundannahme und der Statistik großer Zahlen (gilt für kleine System nicht).

Definition der Entropie

$$S = k \ln \Omega$$

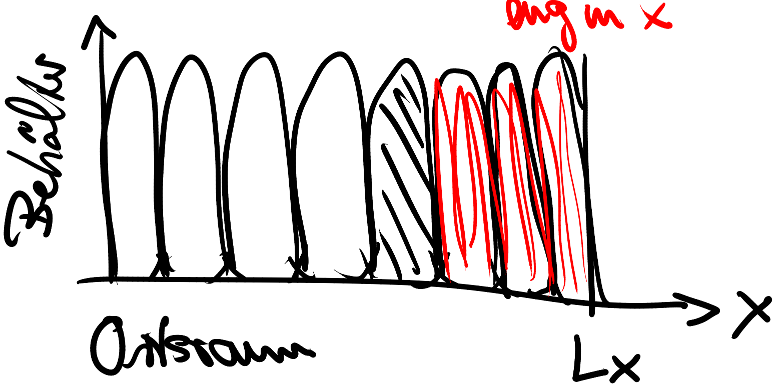
= Boltzmann-konstante · logarithmus der Zustands-zahl

Entropie ist maximal im Gleichgewicht.

Zustandszahl Ω eines idealen Gases

Heisenberg'sche Unschärferelation:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq h$$ ← Planck'sches Wirkungsquantum



Zustände eines Teilchens (N=1)

$$\Omega_1 = \frac{V \cdot V_p}{h^3} = \frac{L_x L_y L_z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z}{h^3}$$

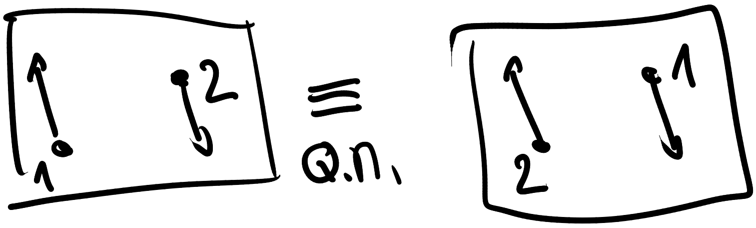
N=1

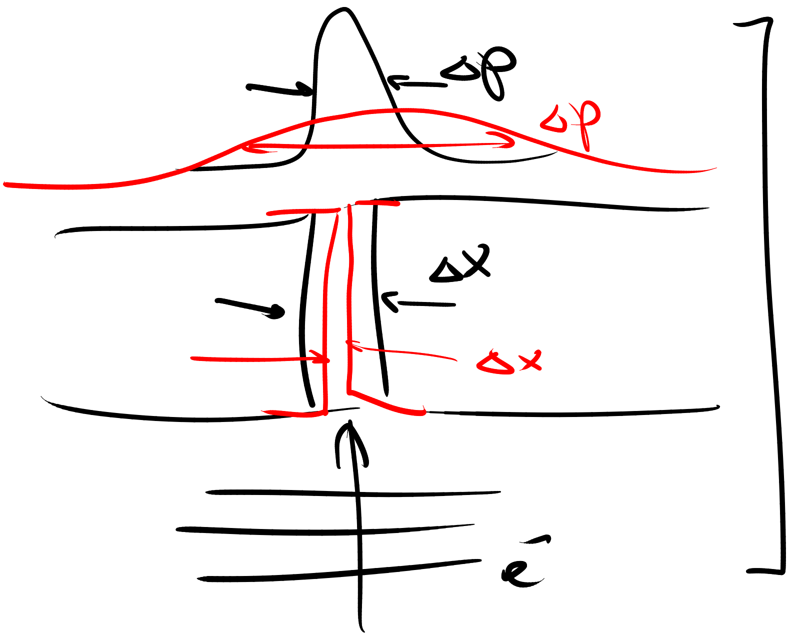
$$= \frac{\text{Impulsraumvolumen}}{h^3}$$

Zustände mehrer Teilchen:

$$\Omega_N = (\Omega_1)^N \cdot \frac{1}{N!}$$

Teilchen in der Q.M. nicht unterscheidbar





Hintergrund

Heisenberg:

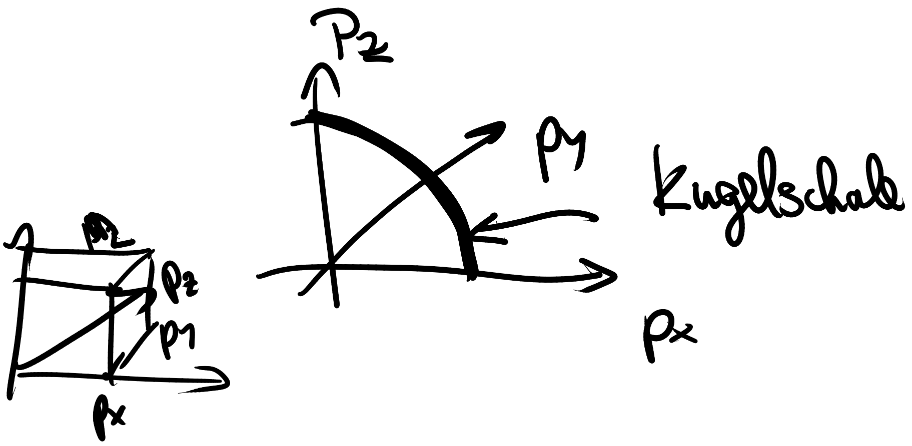
Messung von Δx

⇝ Δp nicht gut def.

(Einfachspalt)

Problem: Gesamtenergie U ist festgelegt

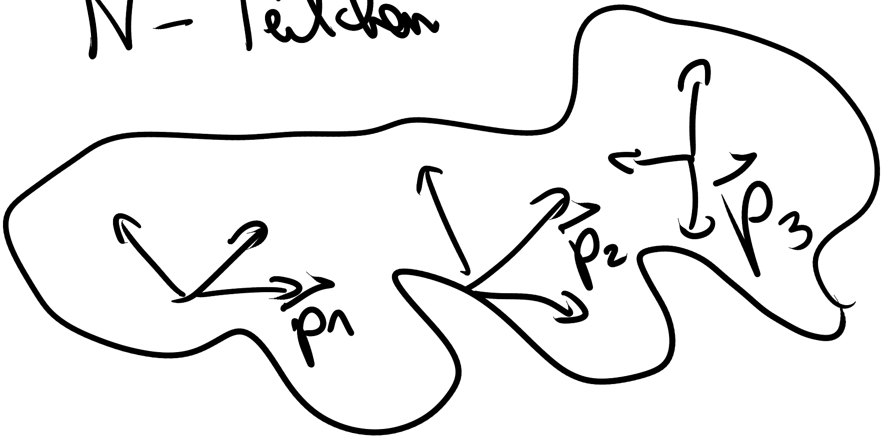
1 Teilchen



$$V_p = \underbrace{4\pi p^2}_{\text{Fläche der Kugelschale}} \cdot \underbrace{\delta p}_{\text{Meßgenauigkeit d. Impulses}}$$

$$U = \frac{p^2}{2m}$$

N-Teilchen



$d = 3N$-dimensionale Kugel~~ober~~fläche.
(nicht Volumen wegen U=konst)

$$A = \frac{2\pi^{d/2}}{(d/2-1)!}\, p^{d-1} \qquad (d = 3N)$$

3N Dim. Kugeloberfl.

Zusammen mit Näherungsformel $N! \approx \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N$

$$\Omega_N = \underset{(\cancel{h^{3N}})}{V^N} \sqrt{\frac{3}{8\pi^2}} \left(\frac{e}{N}\right)^{5N/2} \cdot \left(\frac{4\pi m}{3h^2}\right)^{3N/2} \cdot U^{\frac{3N}{2}-1} \cdot \delta U$$

Typischer Wert: $\Omega_N = 10^{2\cdot 10^{23}}$ für 1l Gas!

Damit

$$S \approx kN\left[\frac{5}{2}(1-\ln N) + \frac{3}{2}\ln\frac{4\pi m}{3h^2} + \ln V + \frac{3}{2}\ln U\right]$$

Boltzmann für Entropie

weil Terme $\neq f(N)$ sind klein

$$S \approx kN\left[-\frac{5}{2}\ln N + \ln V + \frac{3}{2}\ln U\right]$$

Typisches Vorgehen in stat. Mech:

Ω ausrechnen (später einfacher mit Zustandssumme Z) $\longrightarrow$ Durch Ableitung aus S die Zustandsgrößen gewinnen.

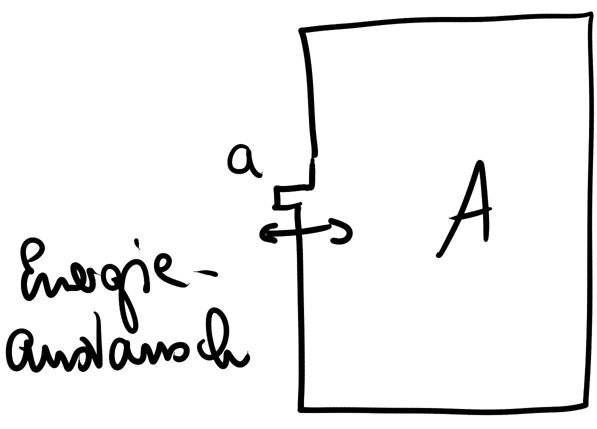
Boltzmann-Verteilung (wichtigste Formel der Thermodynamik)

Bisher: Energiefluß zwischen ähnlich großen Systemen.

Nun: kleines System a tauscht Energie mit großem System A aus.

Gesamtenergie

$E = E_a + E_A = \text{const.}$



Frage: Wahrscheinlichkeit P_a das kleine System mit einer Energie E_a zu finden, welches es sich vom großen System „geborgt“ hat.

• kleine System ist in einem Quantenzustand

$$\Omega_a(E_a) = 1$$

• Kombinatorik:

$$\Omega = \overbrace{\Omega_a(E_a)}^{1} \cdot \Omega_A(E-E_a)$$

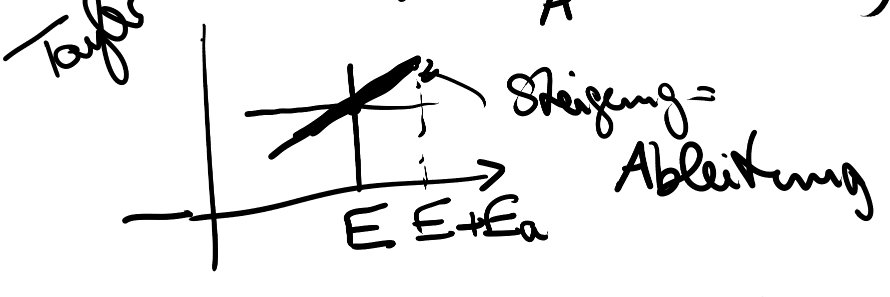
⇝ Wahrscheinlichkeit $P_a \sim \Omega_A(E-E_a)$

Frage: Wieviel Zustände bleiben übrig, wenn A eine Energie E_a abgeben müßte?

Bekannt: $T = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)^{-1}$ und $S = k \ln \Omega$

• Taylor Entwicklung:

$$\ln \Omega_A(E-E_a) = \ln \Omega_A(E) - E_a \cdot \underbrace{\frac{\partial \ln \Omega_A}{\partial E_A}}_{1/kT}$$



[Temp ändert sich kaum, weil $A \gg a$]

⇝ $\Omega_A(E-E_a) = \Omega_A(E) \cdot e^{-E_a/kT}$

Wahrsch: $\boxed{P_a \sim e^{-\frac{E_a}{kT}}}$: Boltzmann-Faktor

Normierung: $$P = \frac{e^{-E_a/kT}}{\underset{s}{\sum} e^{-E_s/kT}} = \frac{e^{-E_a/kT}}{Z}$$

s: Alle Zustände

Z: Zustandssumme

Nota bene:

Austausch von thermischer und Volumenarbeit...
$$P_a \sim e^{-\underbrace{(E+pV)}_{\text{thermodyn. Potentiale}}/kT}$$

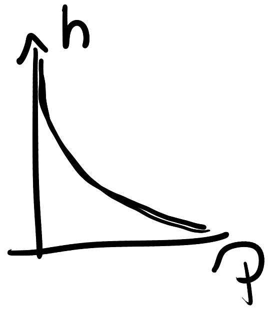
... und Teilchenaustausch:
$$P_a \sim e^{-(E-\mu N)/kT}$$

Beispiel:

a) Ein Luftmolekül der Masse m finden wir in der Höhe h (einer isotherm angenommenen Atmosphäre) mit einer Wahrscheinlichkeit
$$P \sim e^{-\underbrace{mgh}_{E_a}/kT}$$
E_a: Energie des kleinen System

$\rightsquigarrow$ Erwartungswert der Höhe (mittlere Höhe) $\frac{kT}{mg} \approx 8{,}9\,\text{km}$

Stickstoff



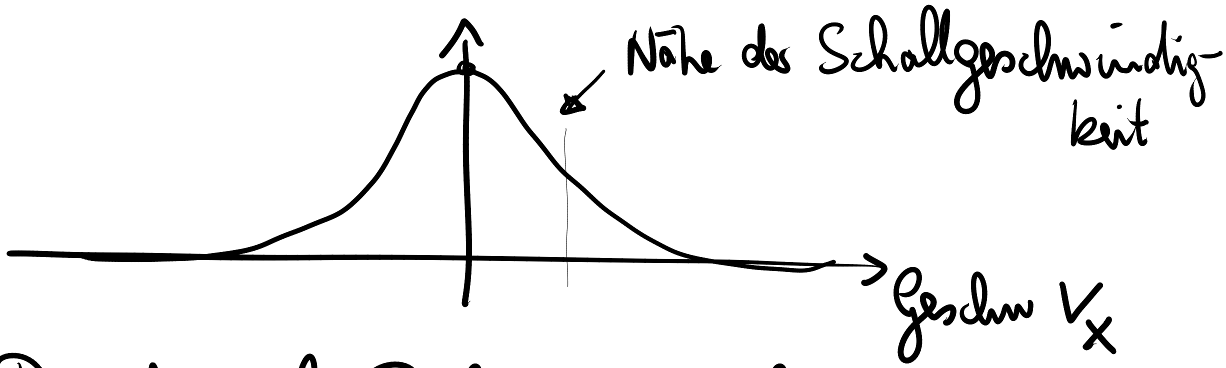
⇝ Wegen $\varrho = \frac{N}{V} = \frac{p}{kT} \sim p$

$T = \text{const}$

⇝ Druck verteilt sich analog zur Dichte

b) Geschwindigkeit eines eindimensionalen Gases:

$$P = e^{-\frac{m v_x^2}{2 \cdot kT}}$$



3D ⇝ Maxwell Boltzmannverteilung