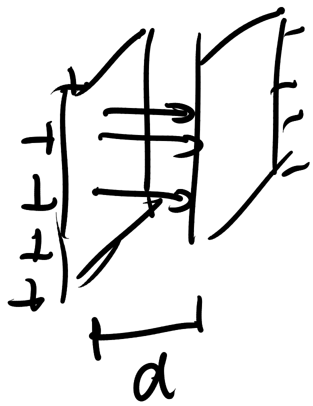
Wir starten um $10^{\underline{15}}$ wie üblich. Gerne auch Fragen jetzt schon → Chat.

Elektrische Felder in Materie

1. Kapazität:



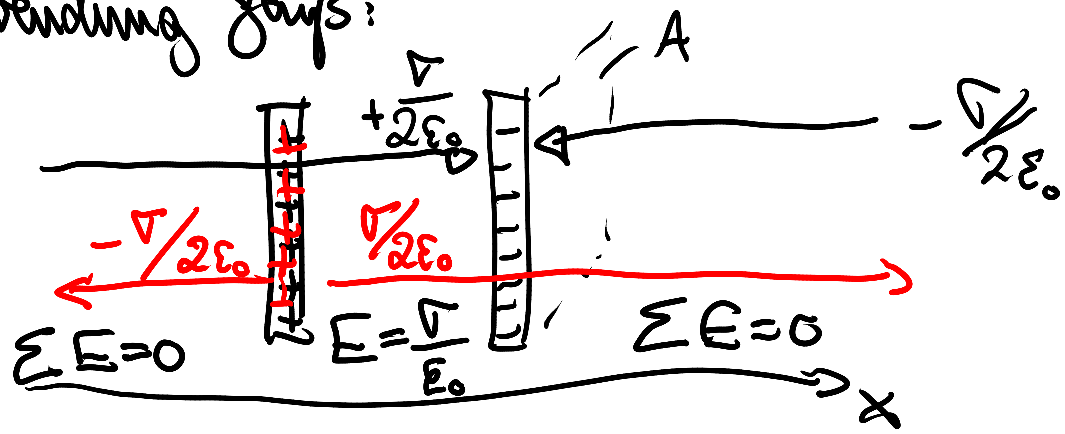
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A \cdot \varepsilon_0} = \frac{U}{d}$$

$$U \sim Q$$

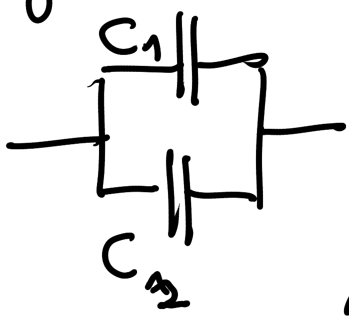
Generell: $U = \frac{Q}{C}$ $\quad (Q = C \cdot U)$

C ← Abh. von Geometrie.

Anwendung Gauß:



2. Parallelschaltung.



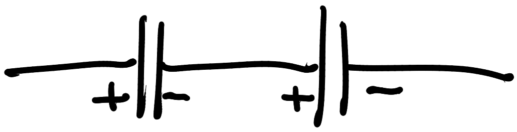
$$Q = C \cdot U$$

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$= C_1 U + C_2 U$$

$$\leadsto C = C_1 + C_2$$

3. Serielle Schaltung.



$$U = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q(\ldots)$$

$$\leadsto \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \left(\frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}\right)^{-1}$$

Energie im elektrischen Feld

Ladungen werden auf den Kondensator gegen die schon vorhandenen Ladung transportiert.

$$\underset{\uparrow \text{ Def.}}{U =} \frac{dW}{dq} \leadsto dW = U(q) \cdot dq = \frac{q}{C} dq$$

$$\leadsto W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} q^2/C$$: Energie im einem Kondensator

$$= \frac{1}{2} C U^2$$

Energiedichte:

Im Plattenkondensator:

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \underset{\uparrow}{=} \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} \underset{\uparrow}{=} \frac{E^2 A^2 \varepsilon_0^2 \cdot d}{2\varepsilon_0 A} = \frac{\varepsilon_0 E^2 \cdot A \cdot d}{2}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A \cdot \varepsilon_0}$$

$V = A \cdot d$: Energiedichte : $w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

Exp: $C = \varepsilon_0 A/d \rightsquigarrow U = \frac{Q}{C} \sim d$

Materie im Kondensator (Typ. Insulator)

a) Kondensator ist geladen. Halten Q fix.
(nicht leitend verbunden, isoliert)
Bringen Isolator ein: U reduziert sich um einen Faktor $1/\varepsilon$

$Q = C \cdot U = \text{const}$ $\rightsquigarrow$ C steigt um ε

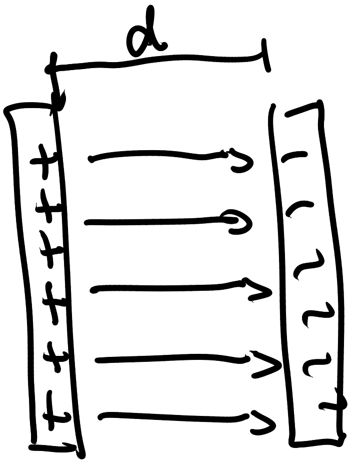
b) Kondensator hat eine konstante Spannung U
(durch ein Spannungsnetzgerät): Q verändert sich beim Einbringen des Isolators

$Q = C \cdot U$; $U = \text{const.}$

Q ? $C \sim \frac{1}{d}$

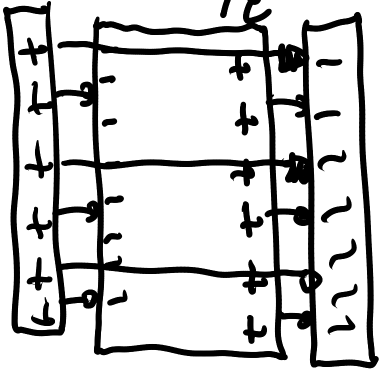
Q steigt mit Material,

$\rightsquigarrow C_{\text{Dielektrischen Material}} = C_{\text{Vakuum}} \cdot \varepsilon$

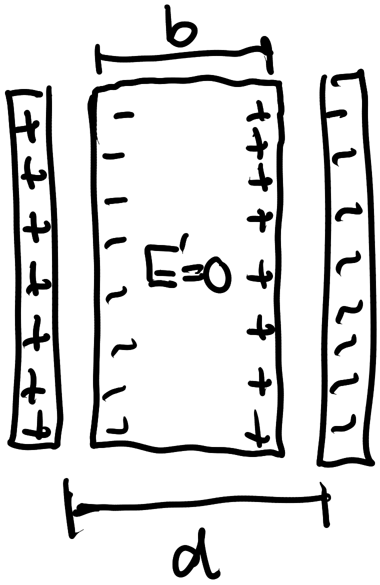


Vakuum

$E' = E/\varepsilon$

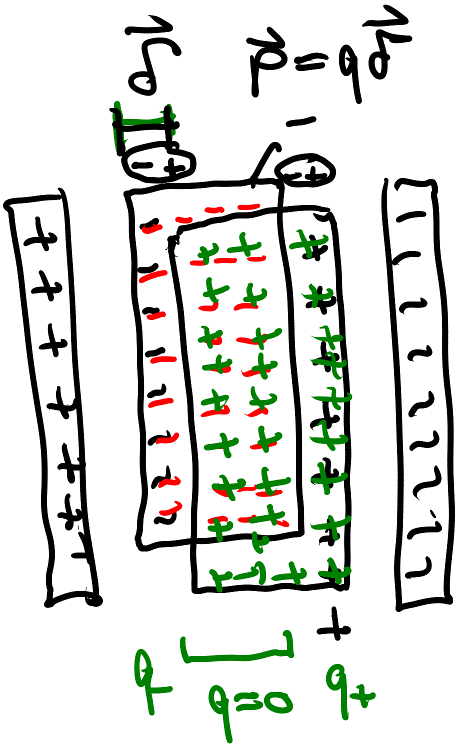


Mit Dielektrikum

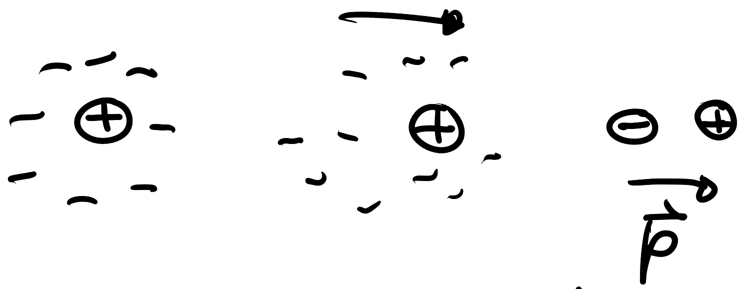


$C = \varepsilon C_0$
(ohne Spalte)

$$C = \frac{A \varepsilon_0}{d-b}$$



Verschiebung der Ladungsschwerpunkte

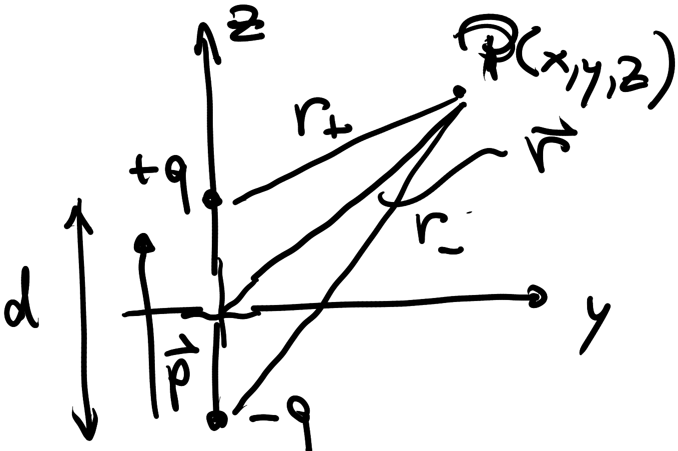


elektrischen Dipol.

Potential und el. Feldstärke eines elektrischen Dipols

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$$



$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} + \frac{-q}{r_-}\right)$$

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d/2)^2}} + \frac{-q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d/2)^2}}\right]$$

Für $r \gg d$: $\left(\overbrace{x^2+y^2+z^2}^{r^2} \mp zd + d^2/4\right)^{-1/2}$

$$= \left[r^2\left(1 \mp \frac{zd}{r^2} + \cancel{\frac{d^2}{4r^2}}\right)\right]^{-1/2}$$

$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2}$

$$\approx \frac{1}{r}\left(1 \pm \frac{zd}{2r^2} + \ldots\right)$$

$(1+x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{x}{2} + \ldots$ für $x \ll 1$) Potenzreihe

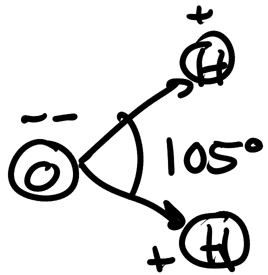
Skalarprodukt

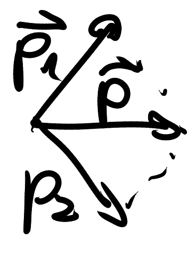
$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\overbrace{(q \cdot d)}^{p} \cdot z}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

Dipolmoment $\vec{p} = q \cdot \vec{d}$ $\qquad \ominus \xrightarrow[\vec{p}]{} \oplus$

z.B.: H^+Cl^- $\qquad p_{HCl} = 3{,}4 \cdot 10^{-30}\, C \cdot m$ $\qquad \overset{+}{H} - \overset{-}{Cl}$

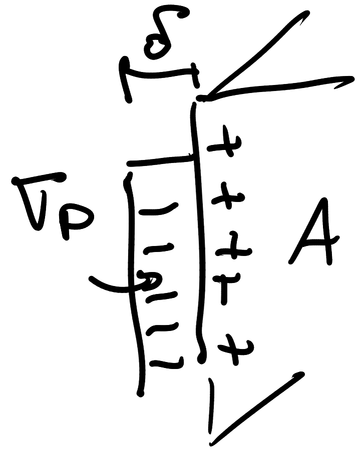
H_2O





$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$

Der Kondensator polarisiert die Materie



$$\overbrace{(\sigma_p \cdot A) \cdot \vec{\delta}}^{\text{Dipol}} = P \cdot \underbrace{A \cdot \vec{\delta}}_{V}, \qquad \underbrace{\sigma_p \cdot A}_{Q_p}$$

$$P = \text{Polarisation} = \frac{\text{Dipolmomente}}{\text{Volumen}}$$

$\rightsquigarrow P = \sigma_p$

Mikroskopisches Bild:

Polarisation $\vec{P} = n \cdot \vec{p}$ ← Atomaren Dipole.

n: Dichte der Dipole

Oft: $\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$

χ: Dielektrische Suszeptibilität.

Elektrische Feld:

Ohne Dielektrikum: $E_0 = \frac{\sigma_F}{\varepsilon_0}$ ← Ladungsdichte durch bewegliche Ladung an den Kondensatorplatten.

Mit Dielektrikum: $\vec{E} = \frac{\sigma_F - \sigma_P}{\varepsilon_0} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$

mit linearer approximation: $E = E_0 - \frac{\chi \varepsilon_0 E}{\varepsilon_0}$

$= E_0 - \chi E$

(kleineres E in Materie)

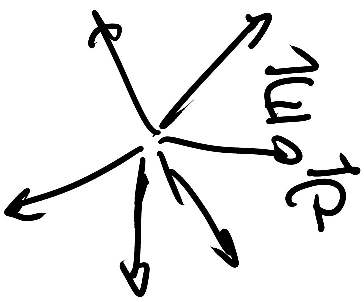
Verhältnis: $\frac{E_0}{E} = 1 + \chi = \frac{U_0}{U} = \frac{Q/U}{Q/U_0} = \frac{C}{C_0} = \varepsilon > 1$

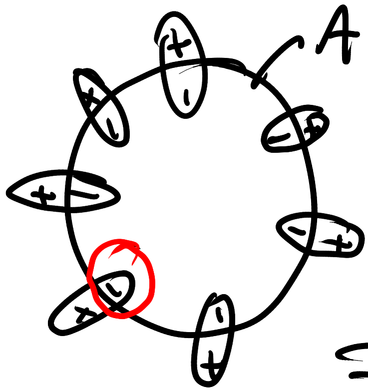
$\rightsquigarrow E = E_0/\varepsilon \qquad 1 + \chi = \varepsilon$

Beispiele

	Luft	H_2O	Benzol	Porzellan	$SrTiO_3$ (@ 10K)
ε	1.0006	80	2,28	4	12 000

Gauß-Satz Erweiterung für Materie





zusätzliche ⊖ Ladungen in der Fläche A

$$Q_P = -\oiint \vec{P}\, d\vec{A} = \iiint \rho_P \, dV$$

Verallgemeinerung:

polarisierten Ladungen

$$\iint \vec{E}\, dA = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \rho\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint (\rho_f + \rho_p)\, dV$$

freie Ladung

$$= \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \rho_f\, dV}_{\text{freie Ladung}} - \underbrace{\iint \vec{P}\, dA}_{\text{Polarisation}}$$

$$\leadsto \quad \boxed{\iint \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}\right) d\vec{A} = \frac{Q_f}{\varepsilon_0}}$$

Viele Textbücher nehmen Linearisierung an:

$\vec{P} \sim \vec{E}$ (als Gesetz!)

Dann $\varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} = \vec{D}$: dielektrischer Verschiebungsvektor

mit Gleichungen $\iint \vec{D}\, d\vec{A} = Q_{frei}$

aber: das sind nicht die fundamentalen Gesetze.

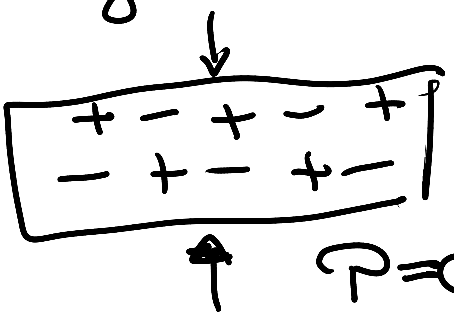
Einfach: $\vec{P} \sim \vec{E}$ $\quad \boxed{\varepsilon_0 \longrightarrow \varepsilon \varepsilon_0}$

mit Dielektrikum.

Piezoelektrizität

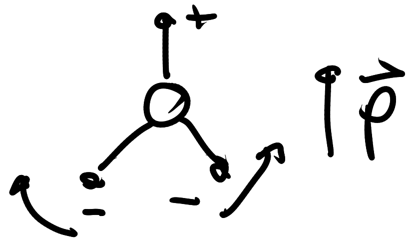
Kompression / Expansion eines Kristalls kann elektrische Felder erzeugen (Umkehrung: angelegte Felder dehnen den Kristall)

Benötigt bestimmte Kristallstruktur



$P=0$

Quarz SiO_2



$$E = 1000\ \text{V/cm};\ \frac{\Delta l}{l} = 10^{-7}$$

$$\Delta l = 1\,\text{nm für } l = 10\,\text{cm}$$

Anwendung
- kleine Bewegung
- Oszillation Quarz (Uhren)